FISICA CUANTICA II

EXAMEN DE JULIO, PROBLEMAS

CURSO 2023/2024 1 de Julio de 2024

Los números entre corchetes indican el valor de cada apartado. Este examen cuenta un 75% de la nota final.

1[4].- En el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq T$, una particula de espin $1/2$ se mueve bajo la accion de un campo magnetico $\vec{B} = (B_x, 0, B_z)$ con $B_x = 3$ y $B_z = 4$. El hamiltoniano de la particula es:

$$H = -\mu \left(B_x \, \sigma_x + B_z \, \sigma_z \right) ,$$

donde μ es el momento magnetico de la particula.

a) Obtengase el operador de evolucion temporal $U(t)$.

b) En el instante inicial $t = 0$ la particula esta en un estado en el que la componente z del espin vale $S_z = +\hbar/2$. Calculese la probabilidad de obtener $S_z = +\hbar/2$ y $S_z = -\hbar/2$ cuando se efectua una medida en el instante de tiempo $t = T$.

c)¿Cuales son las probabilidades de medir $S_x = +\hbar/2$ y $S_x = -\hbar/2$ despues de actuar el campo magnetico?.

2[3].-Los experimentales Alice y Bob efectuan medidas en el estado:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(|+ +\rangle + |- -\rangle \Big) ,$$

siendo $|+ +\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle$, $|- -\rangle = |-\rangle \otimes |-\rangle$ y $\sigma_z |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle$. Alice mide el espin de la primera particula en la direccion del vector $\vec{a}$, mientras que Bob hace lo mismo con la segunda particula en otra direccion determinada por el vector $\vec{b}$. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios y ambos estan contenidos en el plano xz.

a) Calculese la probabilidad de que las medidas den resultados iguales.

b) Obtengase la probabilidad de que los resultados sean distintos.

3[3].- Un sistema de dos niveles esta en un estado caracterizado por la matriz densidad:

$$\rho = \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1| + \frac{1}{3}\Big(i - \frac{1}{2}\Big) |1\rangle\langle 2| - \frac{1}{3}\Big(i + \frac{1}{2}\Big) |2\rangle\langle 1| + \frac{1}{2} |2\rangle\langle 2| ,$$

siendo $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ una base ortonormal del espacio de Hilbert de dos dimensiones. El hamiltoniano del sistema es:

$$H = \omega\big(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| \big) .$$

Si medimos la energia del sistema en este estado

a)¿Que resultados podemos obtener y con que probabilidades?.

b)¿Cual es el valor medio de la energia en esta medida?.

FISICA CUANTICA II

ENUNCIADO

En el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq T$, una particula de espin 1/2 se mueve bajo la accion de un campo magnetico $\vec{B} = (B_x, 0, B_z)$. El hamiltoniano de la particula es:

$$H = -\mu \left(B_x \sigma_x + B_z \sigma_z \right) ,$$

donde μ es el momento magnetico de la particula.

a) Obtengase el operador de evolucion temporal $U(t)$.

b) En el instante inicial $t = 0$ la particula esta en un estado en el que la componente z del espin vale $S_z = +\hbar/2$. Calculese la probabilidad de obtener $S_z = +\hbar/2$ y $S_z = -\hbar/2$ cuando se efectua una medida para $t > T$.

c)¿Cuales son las probabilidades de medir $S_x = +\hbar/2$ y $S_x = -\hbar/2$ despues de actuar el campo magnetico?.

SOLUCION

a)

$$U(t) = e^{-i/\hbar H t} = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \mu t \left(B_x \sigma_x + B_z \sigma_z \right)\right]$$

Definimos

$$\vec{n} = \frac{1}{B} \left(B_x , 0 , B_z \right) \qquad B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2}$$

$$\Rightarrow \quad B_x \sigma_x + B_z \sigma_z = B \, \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \quad \Rightarrow$$

$$U(t) = e^{i \frac{\mu B t}{\hbar} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}$$

Aplicamos

$$e^{i \theta \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \, \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \qquad \text{con } \theta = \frac{\mu B t}{\hbar}$$

$\Rightarrow$

$$U(t) = \cos\left[\frac{\mu B t}{\hbar}\right] + i \operatorname{sen}\left[\frac{\mu B t}{\hbar}\right] \vec{n} \cdot \vec{\sigma} =$$

$$= \cos\left[\frac{\mu B t}{\hbar}\right] + i \operatorname{sen}\left[\frac{\mu B t}{\hbar}\right] \frac{1}{B} \begin{bmatrix} B_z & B_x \\ B_x & -B_z \end{bmatrix}$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} \cos\left[\frac{\mu B t}{\hbar}\right] + i\frac{B_z}{B}\,\text{sen}\left[\frac{\mu B t}{\hbar}\right] & \frac{i B_x}{B}\,\text{sen}\left[\frac{\mu B t}{\hbar}\right] \\ \frac{i B_x}{B}\,\text{sen}\left[\frac{\mu B t}{\hbar}\right] & \cos\left[\frac{\mu B t}{\hbar}\right] - \frac{i B_z}{B}\,\text{sen}\left[\frac{\mu B t}{\hbar}\right] \end{bmatrix}$$

b)

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |+z\rangle$$

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = U(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left[\frac{\mu B t}{\hbar}\right] + i\frac{B_z}{B}\,\text{sen}\left[\frac{\mu B t}{\hbar}\right] \\ i\frac{B_x}{B}\,\text{sen}\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right) \end{pmatrix}}$$

Check de $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1$. Como

$$\langle\psi(t)| = \left(\cos\left[\frac{\mu B t}{\hbar}\right] - i\frac{B_z}{B}\,\text{sen}\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right), -\frac{i B_x}{B}\,\text{sen}\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right)\right)$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \cos^2(\ ) + \underbrace{\frac{B_z^2}{B^2}\,\text{sen}^2(\ ) + \frac{B_x^2}{B}\,\text{sen}^2(\ )}_{\text{sen}^2(\ )} = 1$$

Calculemos las amplitudes de las transiciones

$$|+z\rangle \rightarrow |+z\rangle \qquad |+z\rangle \rightarrow |-z\rangle$$

$$\langle +z|\psi(t)\rangle = (1,0)\,U\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos\left[\frac{\mu B t}{\hbar}\right] + \frac{i B_z}{B}\,\text{sen}\left[\frac{\mu B t}{\hbar}\right]$$

$$\langle -z|\psi(t)\rangle = (0,1)\,U\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i\frac{B_x}{B}\,\text{sen}\left[\frac{\mu B t}{\hbar}\right]$$

Las probabilidades son

$$\boxed{P_{+z}(T) = |\langle +z|\psi(T)\rangle|^2} \qquad \boxed{P_{-z}(T) = |\langle -z|\psi(T)\rangle|^2}$$

$$P_{+z} = \cos^2\left[\frac{\mu BT}{\hbar}\right] + \underbrace{\frac{B_z^2}{B^2}}_{\to\, 1 - \frac{B_x^2}{B_x^2 + B_z^2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\mu BT}{\hbar}\right) =$$

$$= \underbrace{\cos^2\left[\frac{\mu BT}{\hbar}\right] + \operatorname{sen}^2\left[\frac{\mu BT}{\hbar}\right]}_{1} - \frac{B_x^2}{B_x^2 + B_z^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\mu BT}{\hbar}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{+z} = 1 - \frac{B_x^2}{B_x^2 + B_z^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\mu BT}{\hbar}\right)}$$

$$\boxed{P_{-z} = \frac{B_x^2}{B_x^2 + B_z^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\mu BT}{\hbar}\right)}$$

c) Probabilidades de las transiciones:

$$|+z\rangle \to |+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|+z\rangle \to |-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle +x | \psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1)\, U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left[\frac{\mu Bt}{\hbar}\right] + \frac{iB_z}{B}\operatorname{sen}\left(\frac{\mu Bt}{\hbar}\right) + \frac{iB_x}{B}\operatorname{sen}\left(\frac{\mu Bt}{\hbar}\right)\right]$$

$$\boxed{\langle +x | \psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\mu BT}{\hbar}\right) + i\,\frac{B_x + B_z}{B}\operatorname{sen}\left(\frac{\mu BT}{\hbar}\right)\right]}$$

De forma similar

$$\boxed{\langle -x | \psi(T) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{\mu B T}{\hbar}\right) + i \, \frac{B_z - B_x}{B} \, \text{sen}\left(\frac{\mu B T}{\hbar}\right) \right]}$$

Las probabilidades son:

$$\boxed{P_{+x} = \left| \langle +x | \psi(T) \rangle \right|^2} \qquad \boxed{P_{-x} = \left| \langle -x | \psi(T) \rangle \right|^2}$$

$$P_{+x} = \frac{1}{2} \left[\cos^2\left(\frac{\mu B T}{\hbar}\right) + \underbrace{\frac{(B_x + B_z)^2}{B^2}} \, \text{sen}^2\left(\frac{\mu B T}{\hbar}\right) \right]$$

$$\frac{B_x^2 + B_z^2 + 2 B_x B_z}{B^2} = \frac{B_x^2 + B_y^2 + 2 B_x B_z}{B_x^2 + B_z^2} = 1 + \frac{2 B_x B_z}{B_x^2 + B_z^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{+x} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2 B_x B_z}{B_x^2 + B_z^2} \, \text{sen}^2\left(\frac{\mu B T}{\hbar}\right) \right]}$$

$$P_{-x} = \frac{1}{2} \left[\cos^2\left(\frac{\mu B T}{\hbar}\right) + \underbrace{\frac{(B_z - B_x)^2}{B^2}}_{1 - \frac{2 B_x B_z}{B_x^2 + B_y^2}} \, \text{sen}^2\left(\frac{\mu B T}{\hbar}\right) \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{P_{-x} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2 B_x B_z}{B_x^2 + B_z^2} \, \text{sen}^2\left(\frac{\mu B T}{\hbar}\right) \right]}$$

Valores particulares de $B_x, B_z \Rightarrow \boxed{B_x=3\ ,\ B_z=4}$

$$B=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}\ \Rightarrow \boxed{B=5}$$

a)

$$\boxed{U(t)=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{5\mu}{\hbar}t\right)+\frac{4}{5}i\,\text{sen}\left(\frac{5\mu}{\hbar}t\right) & \frac{3}{5}i\,\text{sen}\left(\frac{5\mu}{\hbar}t\right)\\ \frac{3}{5}i\,\text{sen}\left(\frac{5\mu}{\hbar}t\right) & \cos\left(\frac{5\mu}{\hbar}t\right)-\frac{4}{5}i\,\text{sen}\left(\frac{5\mu}{\hbar}t\right)\end{pmatrix}}$$

b)

$$|\psi(t)\rangle=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{5\mu}{\hbar}t\right)+\frac{4}{5}i\,\text{sen}\left(\frac{5\mu}{\hbar}t\right)\\ \frac{3}{5}i\,\text{sen}\left(\frac{5\mu}{\hbar}t\right)\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{P_{+z}=1-\frac{9}{25}\text{sen}^2\left(\frac{5\mu}{\hbar}T\right)}\qquad\boxed{P_{-z}=\frac{9}{25}\text{sen}^2\left(\frac{5\mu}{\hbar}T\right)}$$

c)

$$\langle +x|\psi(T)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{5\mu}{\hbar}T\right)+\frac{7}{5}i\,\text{sen}\left(\frac{5\mu}{\hbar}T\right)\right]$$

$$\langle -x|\psi(T)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{5\mu}{\hbar}T\right)+\frac{1}{5}i\,\text{sen}\left(\frac{5\mu}{\hbar}T\right)\right]$$

$$\boxed{P_{+x}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{24}{25}\text{sen}^2\left(\frac{5\mu}{\hbar}T\right)\right]}$$

$$\boxed{P_{-x}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{24}{25}\text{sen}^2\left(\frac{5\mu}{\hbar}T\right)\right]}$$

Supongase ahora que Alice y Bob miden el espin en las direcciones $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en el estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|++\rangle + |--\rangle\right)$$

a) Calculese la probabilidad de que las medidas den resultados iguales.

b) Calculese la probabilidad de que los resultados sean distintos.

---

a)

$$\boxed{P_{igual} = \left|\langle +\vec{a}, +\vec{b} | \psi\rangle\right|^2 + \left|\langle -\vec{a}, -\vec{b} | \psi\rangle\right|^2}$$

Como

$$|+\vec{a}\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_a}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta_a}{2} \end{pmatrix} \qquad |+\vec{b}\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_b}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta_b}{2} \end{pmatrix}$$

$$\langle +\vec{a}, +\vec{b} | ++\rangle = \langle +\vec{a}|+\rangle\langle +\vec{b}|+\rangle = \cos\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_b}{2}$$

$$\langle +\vec{a}, +\vec{b} | --\rangle = \langle +\vec{a}|-\rangle\langle +\vec{b}|-\rangle = \operatorname{sen}\frac{\theta_a}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta_b}{2}$$

$$\langle +\vec{a}, +\vec{b} | \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_b}{2} + \operatorname{sen}\frac{\theta_a}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta_b}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\theta_b-\theta_a}{2}\right)$$

$$|-\vec{a}\rangle = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\frac{\theta_a}{2} \\ \cos\frac{\theta_a}{2} \end{pmatrix} \qquad |-\vec{b}\rangle = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\frac{\theta_b}{2} \\ \cos\frac{\theta_b}{2} \end{pmatrix}$$

$$\langle -\vec{a}, -\vec{b} | ++\rangle = \operatorname{sen}\frac{\theta_a}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta_b}{2}$$

$$\langle -\vec{a}, -\vec{b} | --\rangle = \cos\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_b}{2}$$

$$\langle -\vec{a}, -\vec{b} | \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta_a}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta_b}{2} + \cos\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_b}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\theta_b-\theta_a}{2}\right)$$

$$P_{igual} = \frac{1}{2} 2 \cos^2 \frac{\theta_b - \theta_a}{2} \Rightarrow \boxed{P_{igual} = \cos^2\left(\frac{\theta_b - \theta_a}{2}\right)}$$

b)

$$\boxed{P_{distinto} = |\langle +\vec{a}, -\vec{b} | \psi \rangle|^2 + |\langle -\vec{a}, +\vec{b} | \psi \rangle|^2}$$

$$\langle +\vec{a}, -\vec{b} | ++ \rangle = \langle +\vec{a} | + \rangle \langle -\vec{b} | + \rangle = -\cos\frac{\theta_a}{2} \,\text{sen}\, \frac{\theta_b}{2}$$

$$\langle +\vec{a}, -\vec{b} | -- \rangle = \langle +\vec{a} | - \rangle \langle -\vec{b} | - \rangle = \text{sen}\,\frac{\theta_a}{2} \cos\frac{\theta_b}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle +\vec{a}, -\vec{b} | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[\underbrace{-\cos\frac{\theta_a}{2} \,\text{sen}\,\frac{\theta_b}{2} + \text{sen}\,\frac{\theta_a}{2} \cos\frac{\theta_b}{2}}_{-\,\text{sen}\,\frac{\theta_b - \theta_a}{2}} \Big]$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle +\vec{a}, -\vec{b} | \psi \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \,\text{sen}\left(\frac{\theta_b - \theta_a}{2}\right)}$$

$$\langle -\vec{a}, +\vec{b} | ++ \rangle = \langle -\vec{a} | + \rangle \langle +\vec{b} | + \rangle = -\,\text{sen}\,\frac{\theta_a}{2} \cos\frac{\theta_b}{2}$$

$$\langle -\vec{a}, +\vec{b} | -- \rangle = \langle -\vec{a} | - \rangle \langle +\vec{b} | - \rangle = \cos\frac{\theta_a}{2} \,\text{sen}\,\frac{\theta_b}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle -\vec{a}, +\vec{b} | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[\underbrace{-\,\text{sen}\,\frac{\theta_a}{2} \cos\frac{\theta_b}{2} + \cos\frac{\theta_a}{2} \,\text{sen}\,\frac{\theta_b}{2}}_{\text{sen}\,\frac{\theta_b - \theta_a}{2}} \Big]$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle -\vec{a}, +\vec{b} | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \,\text{sen}\,\frac{\theta_b - \theta_a}{2}}$$

$$P_{distinto} = \frac{1}{2} 2 \times \text{sen}^2 \frac{\theta_b - \theta_a}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{P_{distinto} = \text{sen}^2\left(\frac{\theta_b - \theta_a}{2}\right)}$$

Claramente $P_{igual} + P_{distinto} = 1$, como debería

Un sistema de dos niveles esta en un estado caracterizado por la matriz densidad

$$\rho = \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{3}(i-\frac{1}{2})|1\rangle\langle 2| - \frac{1}{3}(i+\frac{1}{2})|2\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}|2\rangle\langle 2|$$

siendo $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ una base ortonormal del espacio de Hilbert de dos dimensiones. El hamiltoniano del sistema es:

$$H = \omega(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

donde ω es una constante real. Si medimos la energia del sistema en este estado, ¿que resultados podemos obtener y con que probabilidad?.

Los autovalores de H son $\pm\omega$ y los autovectores son

$$|+\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \qquad |-\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$$

Escribamos la representacion matricial de ρ y de los vectores $|+\omega\rangle$ y $|-\omega\rangle$ en la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3(i-1/2) \\ -1/3(i+1/2) & 1/2 \end{pmatrix} \qquad |+\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|-\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Al medir H podemos obtener $+\omega$ o $-\omega$ con probabilidades

$$\boxed{p(+\omega) = \langle +\omega|\rho|+\omega\rangle} \qquad \boxed{p(-\omega) = \langle -\omega|\rho|-\omega\rangle}$$

$$\rho|+\omega\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{1}{3}(i-1/2) \\ -\frac{1}{3}(i+1/2) & 1/2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/2 + i/3 - 1/6 \\ -i/3 - 1/6 + 1/2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ 1/2 - 1/6 = 1/3}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/3 + i/3 \\ 1/3 - i/3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\langle +\omega|\rho|+\omega\rangle = \frac{1}{2}(1,1) \begin{pmatrix} 1/3 + i/3 \\ 1/3 - i/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(1/3 + \cancel{i/3} + 1/3 - \cancel{i/3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p(+\omega) = 1/3}$$

$$\rho|-\omega\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{1}{3}(i-1/2) \\ -\frac{1}{3}(i+1/2) & 1/2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/2 - i/3 + 1/6 \\ -i/3 - 1/6 - 1/2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ 1/2 + 1/6 = 2/3}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2/3 - i/3 \\ -2/3 - i/3 \end{pmatrix}$$

$$\langle -\omega|\rho|-\omega\rangle = \frac{1}{2}(1,-1) \begin{pmatrix} 2/3 - i/3 \\ -2/3 - i/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(2/3 - \cancel{i/3} + 2/3 + \cancel{i/3}\right) = 2/3$$

$$\boxed{p(-\omega) = 2/3} \Rightarrow \boxed{p(+\omega) + p(-\omega) = 1}$$